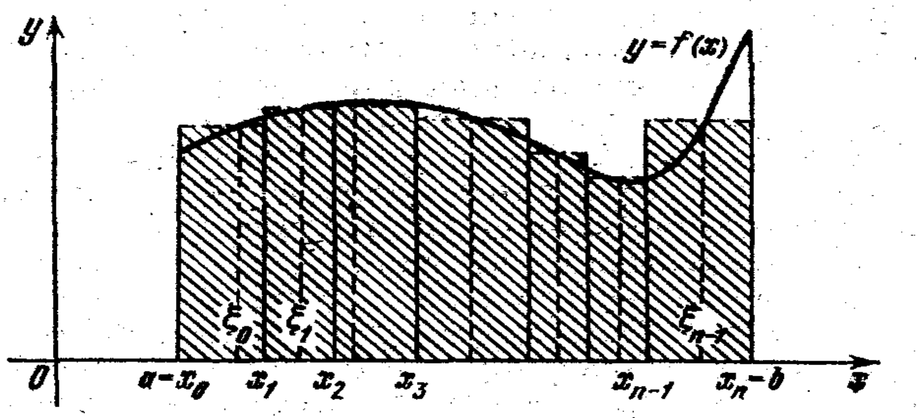
3 - Дәріс

Тақырыбы: **Анықталған интеграл және оның бар болу шарты. Анықталған интеграл анықтамасы және қасиеттері.**

1. Геометриялық және физикалық есептер. Анықталған интеграл анықтамасы.

I-есеп. $[a,b]$ **кесіндісінде үзіліссіз** $f(x)\geq 0$ **функциясы берілсін.** $y=f(x)$ **қисығы,** Ox **өсі және** $x=a$ **мен** $x=b$ **түзулерімен шенелген фигураның (1-сурет)** S **аудан ұғымын анықтау керек.**



1-сурет

Аталған фигураны қисықсызықты трапеция деп атайды.

I-есепті шығару үшін келесі амалды орындаймыз:

а) $[a,b]$ кесінді кез келген $a=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_n=b$ нүктелерімен n бөлікке бөлеміз:

$$[a,b]=[x_0,x_1]\cup[x_1,x_2]\cup\ldots\cup[x_{n-1},x_n]=\bigcup_{j=0}^{n-1}[x_j,x_{j+1}]$$

б) әрбір $[x_j,x_{j+1}]$ бөлікше кесінділерден кез келген ξ_j нүктелерін $\xi_j\in[x_j,x_{j+1}]$, $(j=0,1,\ldots,n-1)$

аламыз және осы нүктелердегі $f(\xi_j)$ функция мәндерін тауып келесі қосындыны құрамыз

$$S_n=f(\xi_0)(x_1-x_0)+f(\xi_1)(x_2-x_1)+\ldots+f(\xi_{n-1})(x_n-x_{n-1})=$$
$$=\sum_{j=0}^{n-1}f(\xi_j)(x_{j+1}-x_j)=\sum_{j=0}^{n-1}f(\xi_j)\Delta x_j,\Delta x_j=x_{j+1}-x_j$$

S_n - $f(x)$ функциясының $[a,b]$ кесіндідегі интегралдық қосындысы деп аталады. Оның әрбір

$$f(\xi_j)(x_{j+1}-x_j)=f(\xi_j)\Delta x_j,\ \ j=0,1,\ldots,n-1$$

қосылғышы – табаны $[x_{j+1},x_j]$ және биіктігі $f(\xi_j)$ болатын тік төртбұрыш ауданына тең, ал S_n қосындысы қисықсызықты трапеция ауданын қандай да бір дәлдікпен жуықтайды:

$$S_n\approx S.$$

Бұл жуық теңдік дәлірек болуы үшін барлық $[x_j,x_{j+1}]$, $j=0,1,\ldots,n-1$ бөлікше кесінділерді мейлінше ұсақтай түсу керек екені түсінікті;

в) Ең үлкен бөлікше кесіндіні нөлге ұмтылдырамыз (әрине, мұнда барлық Δx_j нөлге ұмтылады).

Егер осыдан S_n-шамасы $[a,b]$ кесіндісін бөлу тәсіліне және әрбір бөлікше кесінділерден алынған ξ_j нүктелерін таңдау тәсілдеріне тәуелсіз S ақырлы шегіне ұмтылса, онда S шамасы қисықсызықты трапеция ауданы деп аталады. Сонымен,

$$S = \lim_{\max \Delta x_j \to 0} \sum_{j=0}^{n-1} f(\xi_j)\Delta x_j \qquad (1)$$

Теорема. $[a,b]$-кесіндісінде шенелмеген функция осы кесіндіде интегралданбайды. Бірақ функцияның $[a,b]$ кесіндісінде шенелген болуы оның осы кесіндіде интегралдануы үшін жеткіліксіз.

Анықталған интегралдардың қасиеттері.

1^0. Егер $\forall x \in [a,b]$ үшін $f(x) \equiv 1$ болса, онда

$$\int_a^b dx = b - a$$

2^0. f және g функциялары $[a,b]$ кесіндісінде интегралданатын функциялар, A, B-кез келген сандар болса, онда

$$\int_a^b [A \cdot f(x) + B \cdot g(x)]dx = A\int_a^b f(x)dx + B\int_a^b g(x)dx$$

3^0. Анықталған интегралдың аддитивтік (қосымдылық) қасиеті. Егер кез келген a,b,c сандары үшін f әрбір $[a,b]$, $[a,c]$ және $[c,b]$ кесінділерінде интегралданатын функция болса, онда келесі теңдік орындалады

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$